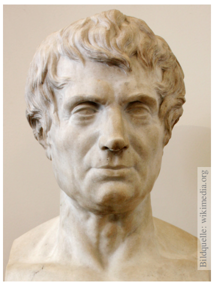
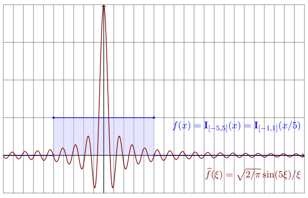
Kapitel K

Fourier–Transformation



Joseph Fourier
(1768–1830)



INSTITUT FOURIER

Vollversion • michael-eisermann.de/lehre/HM3 • 26.02.2025

Inhalt dieses Kapitels K

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Funktion $f:[-T/2,T/2]\to\mathbb{C}$ zerlegen wir in ihre **Fourier–Reihe**:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T} \quad\text{mit}\quad c_k=\frac{1}{T}\int_{x=-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T}f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sei $\Delta\xi=2\pi/T=\omega$. Wir betrachten $\xi=k\Delta\xi$ als **diskrete Variable**:

$$g(\xi)=\int_{x=-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{und}\quad f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}\Delta\xi}g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\Delta\xi$$

Für nicht-periodische Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ betrachten wir $T\to\infty$.
Dann gilt $\Delta\xi\to 0$, und somit wird ξ eine **kontinuierliche Variable**.
Heuristisch wird so aus der Fourier–Reihe das **Fourier–Integral**:

$$g(\xi)=\int_{x=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{und}\quad f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Diese Formel mit 2π vor dem letzten Integral ist die Konvention der Physik, siehe Laplace L406.
Ich verwende in diesem Kapitel die symmetrische, in der Mathematik übliche Normierung $\sqrt{2\pi}$.

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Das erklärt Anschauung und Heuristik, Definitionen und Sätze folgen.
Die Fourier–Analyse hat zahlreiche wichtige technische Anwendungen:

- Digitalisierung und Datenkompression (FFT, MP3, JPEG, MPEG).
- Datenanalyse, Mustererkennung, z.B. Spracherkennung.

Sie ist zudem ein universelles Werkzeug der Mathematik:

- Zerlegen von komplizierten Funktionen in einfache Basisfunktionen.
- Optimale L^2–Approximation, Lösung von Differentialgleichungen.

3B1B: *But what is the Fourier transform?* `youtu.be/spUNpyF58BY`
D. Gabor, Nobelpreis 1971 für Holographie! `youtu.be/EmKQsSDlaa4`

☺ Fourier–Integrale können wir oft ausrechnen dank Integralsätzen wie dem Residuensatz. Hier zahlt sich unsere solide Vorbereitung aus!

⚠ In der Literatur gibt es mindestens drei Konventionen für den Faktor 2π vor dem Integral oder im Exponenten. Beim sorgfältigen Vergleich muss man jeweils nachschauen, welche Normierung zugrunde liegt. Wir beginnen daher, wie es sich gehört, mit einer präzisen Definition.

Fourier–Transformation

Definition K1A: Fourier–Transformation

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist

$$\hat f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \hat f(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir nennen f **Fourier–transformierbar**, falls diese Integrale existieren.
Für $f\in L^1$, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, ist der Integrand absolut integrierbar.
Allgemein nutzen wir Cauchy–Hauptwert B219 und Residuenkalkül F4K.

Die so definierte Zuordnung $\mathscr{F}:f\mapsto\hat f$ heißt **Fourier–Transformation**.
Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}:\hat f\mapsto f$ ist definiert durch

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\hat f(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Auch hierzu fordern bzw. sichern wir die Transformierbarkeit von $\hat f$.
Dies kürzen wir ab als **Transformationspaar** $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \hat f$ bzw. $\hat f \bullet\!\!-\!\!\circ\, f$.

Fourier–Transformation

Periodische Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stellen wir als **Fourier–Reihe** dar, also eine **diskrete Überlagerung** von harmonischen Schwingungen. Hier hingegen stellen wir f dar als ein **Fourier–Integral**, also eine **kontinuierliche Überlagerung** harmonischer Schwingungen $\hat f(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$. Somit ist $\hat f$ die **Dichtefunktion** der in f enthaltenen Harmonischen.

In der Signalverarbeitung zerlegt die Fourier–Transformation das **Signal** f in sein **Spektrum** $\hat f$. Man nennt dann x meist die **Zeitvariable** und $f(x)$ die Funktion im **Zeitbereich**. Als Gegenstück hierzu heißt ξ die **Frequenzvariable** und die Transformierte $\hat f(\xi)$ **Spektralfunktion**.

In (quanten-)physikalischen Anwendungen betrachtet man x als **Ort** und ξ als **Impuls**. Dies sind **konjugierte Variablen** in der klassischen, hamiltonschen Mechanik (s. P2F). In der Quantenmechanik übersetzt dann die Fourier–Transformation zwischen Orts- und Impulsdarstellung.

Hin- und Rücktransformation sind konjugiert gemäß $\mathscr{F}^{-1}(\overline{f})=\overline{\mathscr{F}(f)}$.

⚠ Verschiedene Autoren verwenden hier verschiedene Konventionen.
Der obige Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ führt zu einer symmetrischen Umkehrformel.

Fourier–Transformation und Cauchy–Hauptwert

Wir setzen stillschweigend voraus, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ auf jedem endlichen Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist. Bei Polstellen, etwa $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}/(x-s)$ in $x=s$, betrachten wir das uneigentliche Integral $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-r}^{s-\varepsilon}+\int_{s+\varepsilon}^{r}$.
Als Integral über $\mathbb{R}$ vereinbaren wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x:=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral existiert, wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ erfüllt, aber auch noch in weiteren Fällen.
Als Beispiel betrachten wir unten die **Spaltfunktion** $\mathrm{si}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{si}(x)=\begin{cases}\sin(x)/x & \text{für } x\ne 0,\\ 1 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Diese ist über $\mathbb{R}$ nicht absolut integrierbar, $\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{si}(x)|\,\mathrm{d}x=\infty$. B421
Glücklicherweise existiert noch der obige Cauchy–Hauptwert K107
analog zur Summierbarkeit der Leibniz–Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$. B322

Linearität der Fourier–Transformation

☺ Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar:

Satz K1B: Linearität

Die Fourier–Transformation ist linear:

$$\mathscr{F}\big[a\,f+b\,g\big]=a\,\mathscr{F}(f)+b\,\mathscr{F}(g)$$

für alle $\mathscr{F}$–transformierbaren Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und $a,b\in\mathbb{C}$.

$$f\circ\!\!-\!\!\bullet\,\hat f,\quad g\circ\!\!-\!\!\bullet\,\hat g \quad\Longrightarrow\quad af+bg\circ\!\!-\!\!\bullet\,a\hat f+b\hat g$$

Nachrechnen: Dank Linearität des Integrals gilt:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(af+bg)(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big[a\,f(x)+b\,g(x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)\,\mathrm{d}x\\&=a\,\hat f(\xi)+b\,\hat g(\xi)\end{aligned}$$

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

K107 Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten ein reelles Intervall $[a,b]=[c-r,c+r]$.
(1) Fourier–transformieren Sie die Rechteckfunktion $f(x)=\mathbf{I}_{[a,b]}(x)$.
(2) Berechnen Sie aus der Transformierten $\widehat{f}$ die Rücktransformierte.

Lösung: (1) Im Punkt $\xi=0$ ist die Rechnung besonders leicht:

$$\widehat{f}(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=a}^{b} 1\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,r$$

Für $\xi\neq 0$ rechnen wir geduldig und finden die **Spaltfunktion** B149 :

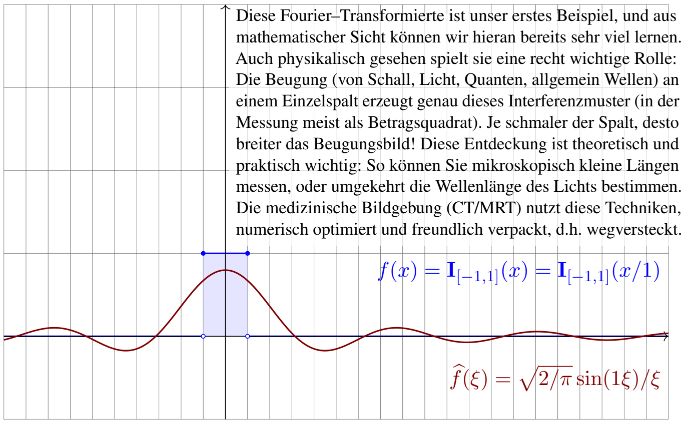
$$\widehat{f}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{-\mathrm{i}\xi}\right]_{x=a}^{b}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}}{\xi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi r}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi r}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}}_{\text{Verschiebung}}\,\underbrace{\sin(\xi r)/\xi}_{\text{Spaltfunktion}}$$

☺ Insbesondere ist $\widehat{f}$ stetig, auch im Punkt $\xi=0$: Entwickeln Sie hierzu $\sin(\xi r)$ als Potenzreihe um $\xi=0$, nutzen die Regel von L'Hospital oder direkt die Ableitung $\sin(\xi r)/\xi=(\sin(\xi r)-\sin(0r))/(\xi-0)\to r\cos(0)$.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

K108 Beispiel

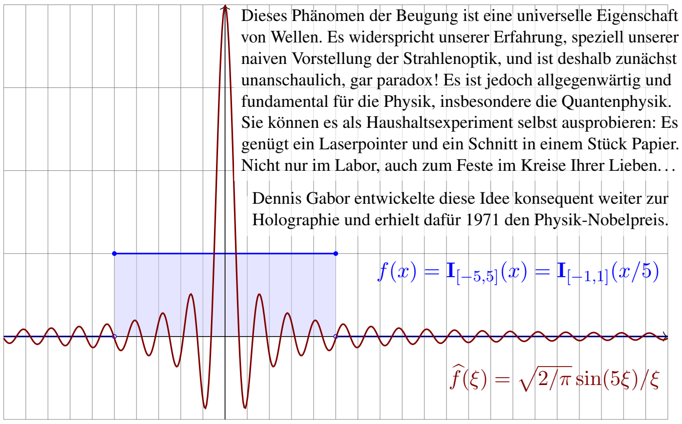


Diese Fourier–Transformierte ist unser erstes Beispiel, und aus mathematischer Sicht können wir hieran bereits sehr viel lernen. Auch physikalisch gesehen spielt sie eine recht wichtige Rolle: Die Beugung (von Schall, Licht, Quanten, allgemein Wellen) an einem Einzelspalt erzeugt genau dieses Interferenzmuster (in der Messung meist als Betragsquadrat). Je schmaler der Spalt, desto breiter das Beugungsbild! Diese Entdeckung ist theoretisch und praktisch wichtig: So können Sie mikroskopisch kleine Längen messen, oder umgekehrt die Wellenlänge des Lichts bestimmen. Die medizinische Bildgebung (CT/MRT) nutzt diese Techniken, numerisch optimiert und freundlich verpackt, d.h. wegversteckt.

☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit. Beugung am Einzelspalt erzeugt dieses Interferenzmuster (quadriert).

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

K109 Beispiel



Dieses Phänomen der Beugung ist eine universelle Eigenschaft von Wellen. Es widerspricht unserer Erfahrung, speziell unserer naiven Vorstellung der Strahlenoptik, und ist deshalb zunächst unanschaulich, gar paradox! Es ist jedoch allgegenwärtig und fundamental für die Physik, insbesondere die Quantenphysik. Sie können es als Haushaltsexperiment selbst ausprobieren: Es genügt ein Laserpointer und ein Schnitt in einem Stück Papier. Nicht nur im Labor, auch zum Feste im Kreise Ihrer Lieben…

Dennis Gabor entwickelte diese Idee konsequent weiter zur Holographie und erhielt dafür 1971 den Physik-Nobelpreis.

☺ Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist $\widehat{f}$ schmal, so ist f breit. Anwendung: So können Sie mikroskopisch kleine Strukturen messen.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

K110 Beispiel

(2) Die Fourier–Transformierte von $f=\mathbf{I}_{[a,b]}$ ist

$$\widehat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}.$$

Erinnerung an Seite F425: Mit dem Residuenkalkül bestimmen wir

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} \operatorname{sign}(u)\,\operatorname*{res}_{z=0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z}\right) = \operatorname{sign}(u).$$

Zu $\widehat{f}$ berechnen wir damit die **inverse Fourier–Transformation**:

$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

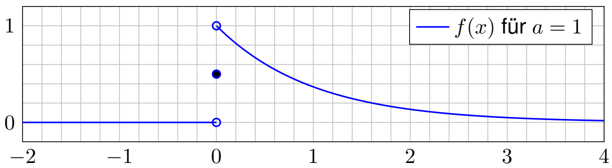
$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-a)}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-b)}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } x\notin[a,b],\\ 1 & \text{für } x\in\,]a,b[,\\ \tfrac12 & \text{für } x\in\{a,b\}.\end{cases}$$

$$(-\tfrac12)-(-\tfrac12)=0 \qquad \tfrac12-(-\tfrac12)=1 \qquad \tfrac12-\tfrac12=0$$

☺ Wir erhalten die ursprüngliche Funktion f, aber sprungnormiert!

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung

K111 Beispiel



Aufgabe: Sei $a>0$. Berechnen Sie folgende Fourier–Transformation:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{für } x<0\\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x>0\\ 1/2 & \text{für } x=0\end{array}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Exp}}{=} \int_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}}{a+\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung

K112 Beispiel

Aufgabe: Berechnen Sie die Rücktransformation.

Lösung: Wir nutzen den Residuenkalkül, hier erneut Satz F4K:

$$f(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{a+\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{\xi-\mathrm{i}a}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{\underset{\text{F4K}}{=}} \begin{cases}\mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x>0 \quad \text{(Residuum in } \xi=\mathrm{i}a),\\ 0 & \text{für } x<0 \quad \text{(keine Sing. in } \mathbb{C}_{\mathrm{Im}\le 0}).\end{cases}$$

Den Fall $x=0$ müssen wir separat weiterrechnen:

$$f(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-\mathrm{i}a}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi+\mathrm{i}a}{\xi^2+a^2}\,\mathrm{d}\xi \text{ (gerader Anteil)}$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\xi^2+a^2}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{HDI}}{\underset{\text{B1I}}{=}} \frac{1}{2\pi}\Big[\arctan(x/a)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac12$$

☺ Wir erhalten genau die Exponentialverteilung der vorigen Aufgabe! Insbesondere gilt: In $x=0$ ist die Rücktransformierte sprungnormiert. Zur Bequemlichkeit haben wir deshalb auch f gleich so eingerichtet.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

K113 Beispiel

Aufgabe: Sei $a>0$. Fourier–transformieren Sie $g(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$.

Lösung: Direkt ausrechnen… oder besser gleich Linearität nutzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x>0\\ 0 & \text{für } x<0\\ 1/2 & \text{für } x=0\end{array}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow\quad g(x)=f(x)+f(-x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{g}=\widehat{f}(\xi)+\widehat{f}(-\xi)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}+\frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2a}{a^2+\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\xi^2}$$

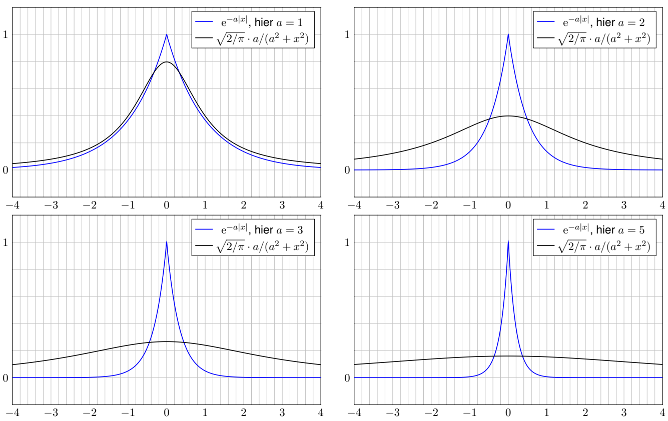
☺ Die Rücktransformation gelingt ebenso: Wir haben oben bereits $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})=f$ ausgerechnet. Daraus folgt $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{g})=g$ dank Linearität.

☺ Dies folgt ebenso aus jedem der beiden folgenden Umkehrsätze, da die Funktion f und ihre Transformierte $\widehat{f}$ alle Bedingungen erfüllen.

Fourier–Transformation der Cauchy–Verteilung

K114 Beispiel

☺ Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.



Eigenschaften der Fourier–Transformierten

K115

☺ Unsere Beispiele illustrieren folgende allgemeine Regel:

Satz K1C: Eigenschaften der Fourier–Transformierten

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, dann gilt:

(1) Die Fourier–Transformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}$$

(2) Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big|\to 0 \quad \text{für} \quad |\xi|\to\infty$$

(3) Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\big|\widehat{f}(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi$$

Eigenschaften der Fourier–Transformierten

K116 Erläuterung

Die Fourier–Transformierte haben wir oben sehr allgemein definiert: Für das Integral fordern wir nur die Existenz des Cauchy–Hauptwerts. Das hat den Vorteil, auf möglichst viele Funktionen anwendbar zu sein; genau das nutzen wir bereits in unseren ersten Beispielrechnungen.

Gute Eigenschaften hat die $\mathscr{F}$–Transformation aber erst für absolut integrierbare Funktionen, $f\in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, also solche mit $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$. Das ist eine Einschränkung, garantiert uns aber starke Folgerungen. Meist werden wir uns also auf diesen besonders gutartigen Fall stützen.

Im Satz ist die absolute Integrierbarkeit von f wesentlich, andernfalls kann die Transformierte $\widehat{f}$ auch unstetig sein, wie in obigen Beispielen: Die Spaltfunktion $\widehat{f}(\xi)=\sqrt{2/\pi}\,\sin(\xi)/\xi$ ist nicht absolut integrierbar, $\widehat{f}\in L^2\smallsetminus L^1$, und tatsächlich ist die (Rück)Transformierte nicht stetig.

(3) Die Plancherel–Gleichung erweitert die Fourier–Isometrie J1A. Sie besagt: Genau dann ist f quadrat-integrierbar, wenn $\widehat{f}$ dies ist, und die Integrale über $|f|^2$ und $|\widehat{f}|^2$ sind gleich (Energiegleichung). Wir zeigen dies etwas später gegen Ende des Kapitels (Satz K3A).

Beweis der Stetigkeit der Transformierten

K117 Ausführung

(1) Sei f absolut integrierbar. Die Beschränktheit von $\widehat{f}$ ist dann klar:

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big|}_{\le 1}\cdot\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit von $\widehat{f}(\xi)$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)\big| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+\eta)x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big]f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big|}_{=1}\cdot\underbrace{\big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}-1\big|\cdot\big|f(x)\big|}_{=:\,g_\eta(x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

In jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x}\to 1$ für $\eta\to 0$, demnach also $g_\eta(x)\to 0$. Zudem ist $g_\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ beschränkt durch die integrierbare Funktion $2|f|$. Dank majorisierter Konvergenz D209 vertauschen Integral und Limes:

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathbb{R}}g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\lim_{\eta\to 0}g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}0\,\mathrm{d}x = 0$$

Somit gilt $\big|\widehat{f}(\xi+\eta)-\widehat{f}(\xi)\big|\to 0$, also $\widehat{f}(\xi+\eta)\to\widehat{f}(\xi)$ für $\eta\to 0$.

Beweis des Riemann–Lebesgue–Lemmas

K118 Ausführung

(2) Die Transformierte von $f(x)=\mathbf{I}_{[a,b]}(x)$ verschwindet im Unendlichen:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=a}^{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi b}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi a}}{\xi}\to 0 \quad \text{für } |\xi|\to\infty$$

Dank Linearität gilt dies somit für alle Treppenfunktionen. Jede absolut integrierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ können wir durch Treppenfunktionen approximieren: Zu $\varepsilon>0$ existiert eine Treppenfunktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit

$$\big\|f-g\big\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}}\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}x\le\varepsilon.$$

Damit liegen auch die Transformierten $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ nahe beieinander:

$$\big|\widehat{f}(\xi)-\widehat{g}(\xi)\big| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\big[f(x)-g(x)\big]\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}}\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}x\le\varepsilon$$

Aus $|\widehat{f}(\xi)|\le|\widehat{g}(\xi)|+\varepsilon$ und $|\widehat{g}(\xi)|\to 0$ erhalten wir

$$\limsup_{|\xi|\to\infty}\big|\widehat{f}(\xi)\big| \le \limsup_{|\xi|\to\infty}\big|\widehat{g}(\xi)\big|+\varepsilon=\varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon>0$ gilt, folgern wir $\limsup_{|\xi|\to\infty}\big|\widehat{f}(\xi)\big|=0$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, L^1$

K119 Ausführung

Satz K1D: Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, L^1$

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist die Funktion $\widehat{f}$ stetig. Ist umgekehrt auch $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar und f stetig, so gilt in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

⚠ Der Satz fordert die strenge Voraussetzung, dass $f,\widehat{f}\in L^1\cap C^0$ gilt, also beide Funktionen sowohl stetig als auch absolut integrierbar sind. Als Gegenleistung garantiert er die Umkehrformel in *jedem* Punkt!

☺ Die Cauchy–Verteilung K113 erfüllt Voraussetzung und Folgerung.

☹ Für die Spaltfunktion K107 gilt nur $f\in L^1\smallsetminus C^0$ und $\widehat{f}\in C^0\smallsetminus L^1$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, L^1$

K120 Ausführung

Wir sprechen von **Fourier–Analyse** und **Fourier–Synthese**:

- Die Analyse $\mathscr{F}: f\mapsto\widehat{f}$ zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\widehat{f}$.
- Die Synthese $\mathscr{F}^{-1}:\widehat{f}\mapsto f$ integriert das Spektrum $\widehat{f}$ zum Signal f.

Dies ist analog zu Fourier–Reihen, dort mit diskretem Spektrum. Für die Ausdehnung $\mathscr{F},\mathscr{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ siehe Seite K301.

Beispiel: Die Umkehrformel für Glockenkurven können wir explizit nachrechnen K128. Hier sind f und $\widehat{f}$ stetig und absolut integrierbar.

Beweisidee: Der Satz gilt für Glockenkurven K128, also auch für ihre Linearkombination K106. Jede absolut integrierbare Funktion lässt sich so approximieren. Durch Grenzübergang gilt er dann für alle $f,\widehat{f}\in L^1$.

Bemerkung: Dieser Umkehrsatz ist ein wichtiger erster Schritt. In vielen Anwendungen jedoch ist f nicht stetig oder $\widehat{f}$ nicht absolut integrierbar. Wir möchten daher ein Kriterium, das auch Sprungstellen behandelt. Der nächste Satz liefert diese praktische und bequeme Erweiterung. Wir finden wieder die Sprungnormierung wie bei Fourier–Reihen.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

K121

Satz K1E: Umkehrformel für sprungnormierte Funktionen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zudem sei f stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert,

$$f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Dann gilt für jeden Punkt $x\in\mathbb{R}$ die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Für solche Funktionen ist die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, \widehat{f}$ also umkehrbar.

☺ Einfachster Fall: Ist f stetig in x, so ist $f(x)=f(x\pm)$ sprungnormiert.

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

K122 Ausführung

☺ Dies haben wir in unseren Beispielen beobachtet, etwa K107: Die Umkehrformel gilt für Indikatorfunktionen $f=\mathbf{I}_{[a,b]}$ mit $a<b$ in $\mathbb{R}$: Hier können wir beide $\mathscr{F}$–Transformationen explizit nachrechnen!

☺ Dank Linearität gilt der Satz somit für alle Treppenfunktionen.

Beweis: Eine Rechnung für den allgemeinen Fall finden Sie bei Meyberg–Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, §11.6, Satz 6.3.

Wir werden den Satz hier durch weitere Rechenbeispiele illustrieren. Das ersetzt nicht den Beweis, trainiert aber unsere Rechentechniken.

Bemerkung: Der Satz entspricht dem Dirichlet–Kriterium I2A für Fourier–Reihen: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periodisch, stückweise stetig diff'bar und sprungnormiert, so gilt für die Fourier–Koeffizienten $\widehat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$:

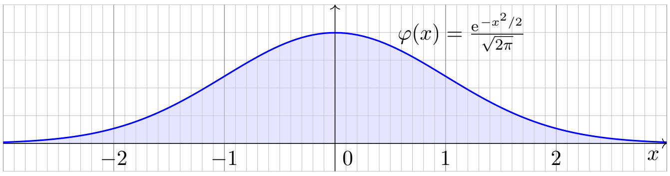
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir schreiben „$f(t)=\dots$“ und nicht bloß „$f(t)\sim\dots$“, denn die Reihe konvergiert in jedem Punkt t und hat als Grenzwert tatsächlich $f(t)$.

Die Standard-Normalverteilung

Wir erinnern an die Dichte der **Standard-Normalverteilung**

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$



🙂 Wahrscheinlichkeitsdichte: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$
🙂 Hier gilt Schwerpunkt = Mittelwert = $\int_{\mathbb{R}} x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
🙂 Trägheitsmoment = Varianz = $\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle.
Auch für die Fourier–Transformation ist sie ein zentrales Beispiel.

Wiederholung: das Gaußsche Integral

Wiederholung: Berechnen Sie das Gaußsche Integral C230

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Lösung: Wir nutzen Fubini und Transformation in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\Big)^2 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\Big)\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\Big) \\
\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Exp}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) \\
\overset{\text{Polar}}{=} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
\overset{\text{Lin}}{=} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\rho &\overset{\text{HDI}}{=} 2\pi\Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\Big]_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi
\end{aligned}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Satz K1F: Fouriertransformierte der Standard-Normalverteilung

Für die Normalverteilung gilt $\varphi \circ\!\!-\!\!\bullet\; \varphi$, also $\mathrm{e}^{-x^2/2} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

🙂 Die Fourier–Transformierte der Standard-Normalverteilung φ ist…
sie selbst, also $\widehat{\varphi} = \varphi$! Auch die Rücktransformation von $\widehat{\varphi}$ ergibt φ.
Dies gelingt mit Cauchy–Integralsatz K128 oder Ableitung D415.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie den Wert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ sowie
(2) $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)$ durch Ableitung unter dem Integral.
(3) Berechnen Sie hieraus die Funktion $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Lösung: (1) Die Fourier–Transformierte ist definiert durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Den Wert für $\xi = 0$ kennen wir dank des Gaußschen Integrals:

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung

(2) Wir berechnen $\widehat{\varphi}'$ durch Differenzieren unter dem Integral:

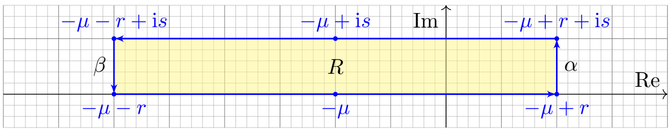
$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \qquad (\ldots \text{ partielle Integration}\ldots) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Big[\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_{x\to-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} \xi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

(3) Demnach genügt $\widehat{\varphi}$ der Differentialgleichung $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)$.
Wir trennen die Variablen gemäß $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$
und integrieren zu $\ln\widehat{\varphi}(\xi) - \ln\widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
Mit $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

🙂 Diese Rechnung gelingt dank unserer Integrationswerkzeuge!
Mit Satz K2A wird diese Rechnung ein eleganter Vierzeiler. K207
Wir rechnen es nochmal alternativ mit dem Cauchy–Integralsatz.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Aufgabe: Vergleichen Sie $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$ mit $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x$
dank des Cauchy–Integralsatzes und zeigen Sie Gleichheit für $r \to \infty$.



Lösung: Dies sind Wegintegrale der holomorphen Funktion $\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}$:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\partial R} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{x=-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{x=-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\alpha} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\beta} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z \\
&\to \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

🙂 Die Wegintegrale längs α und β verschwinden für $r \to \infty$,
denn $\left|\int_{\alpha} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\alpha} \left|\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\right| \cdot |\mathrm{d}\alpha| \leq s\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\mathrm{i}s-\mu+r)^2/2\sigma^2} \to 0$.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Normalverteilung

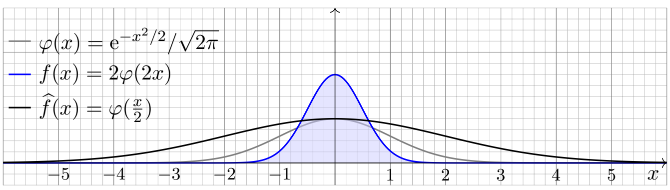
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi).$$

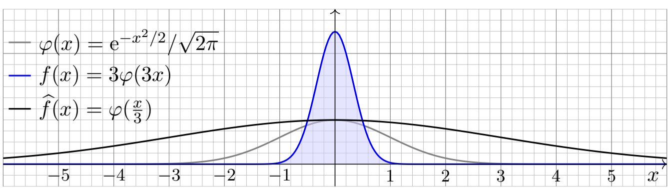
Lösung: Wir setzen die Definition ein und rechnen es aus:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{qE}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}}_{\text{quadratische Ergänzung}}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}}_{\text{Rest ohne } x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Res}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi)
\end{aligned}$$

🙂 Die Rücktransformierte $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$ berechnen Sie ebenso leicht.

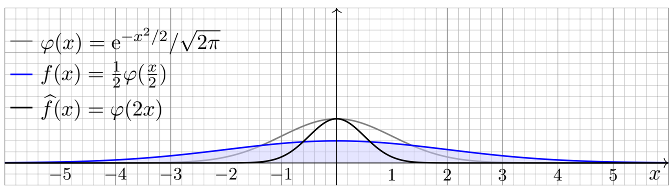
Fourier–Transformation der Normalverteilung

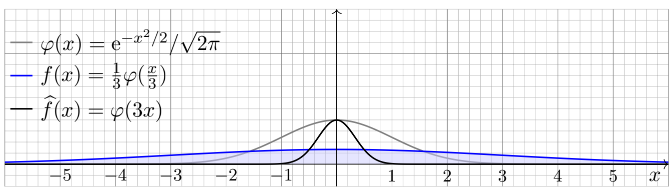




🙂 Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax)\,\mathrm{d}x = 1$ bleibt unverändert.
🙂 Wir sehen die Unschärferelation: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.

Fourier–Transformation der Normalverteilung





🙂 Der Flächeninhalt $\int_{\mathbb{R}} a\varphi(ax)\,\mathrm{d}x = 1$ bleibt unverändert.
🙂 Wir sehen die Unschärferelation: Ist f breit, so ist $\widehat{f}$ schmal.

Grundlegende Rechenregeln
K201

Für die Transformation $f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$
\begin{array}{ll}
a\,f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet a\,\widehat{f}(\xi), & f(x)+g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi),\\[1ex]
f(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(-\xi), & \overline{f(x)} \circ\!\!-\!\!\bullet \overline{\widehat{f}(-\xi)},\\[1ex]
f(ax) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \dfrac{1}{|a|} f\Big(\dfrac{x}{a}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(a\xi),\\[1ex]
f(x-a) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\,\widehat{f}(\xi), & \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi-a),\\[1ex]
\partial_x f(x) \overset{⚠}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi), & x\,f(x) \overset{⚠}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi),\\[1ex]
(f*g)(x) \overset{⚠}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), & f(x)\cdot g(x) \overset{⚠}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).
\end{array}
$$

⚠ Die letzten vier erfordern L^1–Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$.
☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.

Streckung und Verschiebung: Nachrechnen
K202 Ausführung

Konjugation:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Streckung: Substitution mit $y = ax$ für $a \neq 0$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y/a} f(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{|a|}.$$

Ortsverschiebung: Substitution mit $y = x - a$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(y+a)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Phasenverschiebung: Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-a)x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Streckung und Verschiebung: Anwendungsbeispiel
K203 Ausführung

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $a > 0$ und Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $a > 0$ gilt

$$f(x/a) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a\,\widehat{f}(a\,\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

Bei Verschiebung um $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{I}_{[-a,a]}(x-c) = \mathbf{I}_{[c-a,c+a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c\xi}\,\frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

☺ Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung!
Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.
Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ.

Streckung und Verschiebung: Anwendungsbeispiel
K204 Ausführung

Aufgabe: Wir wissen bereits

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}.$$

Was erhalten Sie bei Streckung um $\sigma > 0$ und Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$?

Lösung: Bei Streckung um $\sigma > 0$ gilt

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Bei Verschiebung um $\mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\varphi(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}.$$

☺ Dies können Sie wie oben auch direkt nachrechnen: Wiederholung!
Wir sehen erneut die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.
Die Ortsverschiebung in x entspricht der Phasenverschiebung in ξ.

Ableitung und Multiplikation
K205

Satz K2A: Ableitung und Multiplikation

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar mit $\mathscr{F}$–Transformierter $f \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}$.
(1) Ist f absolut stetig und $\partial_x f$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so gilt

$$\boxed{\partial_x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi).}$$

(2) Ist $x\,f(x)$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so ist $\widehat{f}$ stetig diff'bar und

$$\boxed{x\,f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi).}$$

Die $\mathscr{F}$–Transformation $f \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}$ verwandelt die Ableitung ∂_x in die Multiplikation mit $\mathrm{i}\xi$, und Multiplikation mit x in die Ableitung $\mathrm{i}\partial_\xi$.
Diese Formeln können wir mehrfach anwenden auf $\partial_x^n f(x)$ und $x^n f(x)$.
☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$:
Ist $\partial_x^n f(x)$ stetig und absolut integrierbar, so folgt $\xi^n \widehat{f}(\xi) \to 0$.
☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.
Ist $x^n f(x)$ absolut integrierbar, so ist $\widehat{f}(\xi)$ n-mal stetig differenzierbar.

Ableitung und Multiplikation
K206

Nachrechnen: (1) Für $f' = \partial_x f$ erhalten wir dank partieller Integration

$$\widehat{f'}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{Das schreit nach partieller Integration!}$$

$$\underset{L^1}{\overset{\text{B2G}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{f(x)\to 0 \text{ für } x\to\pm\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

Für $s,t \ge x$ gilt $|f(s)-f(t)| = |\int_s^t f'(u)\,\mathrm{d}u| \le \int_s^t |f'(u)|\,\mathrm{d}u \le \int_x^\infty |f'(u)|\,\mathrm{d}u$. Für $x \to \infty$ geht Letzteres gegen 0, somit erfüllt $f(x)$ die Cauchy–Bedingung und besitzt einen Grenzwert. Ebenso für $x \to -\infty$. Beide Grenzwerte sind Null, andernfalls wäre f nicht absolut integrierbar.

(2) Dank $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ dürfen wir ∂_ξ unters Integral ziehen:

$$\widehat{xf(x)}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,x\,f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Diff}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\partial_\xi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{L^1}{\overset{\text{D3E}}{=}} \mathrm{i}\partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi)$$

☺ Alles gelingt dank unserer starken Werkzeuge. ⚠ Die technischen Vorkehrungen sind wirklich nötig, sonst verwickelt sich die Rechnung in verheerende Widersprüche. K409

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung
K207 Beispiel

Beispiel: Wir betrachten erneut die Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}}$$

Die oben durchgeführten Rechnungen für $\widehat{\varphi} = \varphi$ waren lehrreich, aber eher mühsam. Die folgende Aufgabe macht es uns wesentlich leichter:

Aufgabe: Rechnen Sie folgende Schritte nach und begründen Sie:
(1) Die Funktion φ erfüllt die Differentialgleichung $\partial_x\,\varphi(x) + x\,\varphi(x) = 0$.
(2) Die $\mathscr{F}$–Transformierte erfüllt somit ebenfalls $\xi\,\widehat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi\,\widehat{\varphi}(\xi) = 0$.
(3) Wir trennen die Variablen gemäß $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$, integrieren zu $\ln\widehat{\varphi}(\xi) - \ln\widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$ und erhalten die Lösung $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
(4) Mit dem Anfangswert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Lösung: Die ausführliche Aufgabenstellung enthält bereits die Antwort:
Wir überprüfen (1) durch Ableiten, damit folgt (2) mühelos aus Satz K2A.
(3) Diese Differentialgleichung haben wir bereits auf Seite K126 gelöst.
(4) Den Wert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ haben wir oben auf Seite K124 berechnet.

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung
K208 Beispiel

Aufgabe: Zu $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ kennen wir bereits $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.
(5) Fourier–transformieren Sie $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ und $h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Bemerkung: Wir können die Fourier–Integrale direkt ausrechnen…
☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: (5a) Wir nutzen die Multiplikationsregel aus Satz K2A:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \widehat{f}(\xi) & = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) = x\,f(x) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) & = -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) = x^2\,f(x) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (\mathrm{i}\partial_\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) & = (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{array}
$$

(5b) Alternativ nutzen wir die Ableitungsregel aus Satz K2A:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \widehat{f}(\xi) & = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) = -\partial_x\,f(x) & \circ\!\!-\!\!\bullet & -\mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi) & = -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) = \partial_x^2\,f(x) + f(x) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(\xi) & = (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{array}
$$

Übung: Sind die L^1–Voraussetzungen von Satz K2A hier erfüllt?

Faltung und Produkt

Satz K2B: Faltung und Produkt

(0) Sind $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, so auch ihre **Faltung**

$$(f*g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(x-s)\,\mathrm{d}s.$$

(1) Unter Fourier–Transformation wird sie zum punktweisen **Produkt**:

$$(f*g)(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi)$$

(2) Umgekehrt wird das punktweise Produkt zur Faltung:

$$f(x)\cdot g(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi)$$

⚠ Den Faktor $\sqrt{2\pi}$ empfinde ich hier als störend, aber er folgt aus unserer in Definition K1A festgelegten Normierung. Andere Konventionen sind hier bequemer, dafür andernorts lästiger.

Aufgabe: Rechnen Sie diese beiden Transformationsregeln nach!

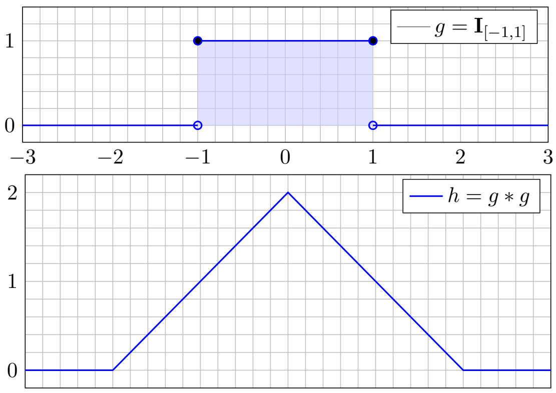
Faltung und Produkt

Nachrechnen: (1) Dank Fubini und Substitution $x=s+t$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi s} f(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{t\in\mathbb{R}}\int_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(s+t)} f(s)\,g(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Subs}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{t\in\mathbb{R}}\int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\cdot\left[\int_{t\in\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\cdot(f*g)(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f*g}(\xi)
\end{aligned}$$

(2) Die umgekehrte Formel zeigen Sie wörtlich genauso: Übung!
Zur Faltung setzen wir nun $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ als absolut integrierbar voraus.

Faltung von Rechteck zu Dreieck



🙂 Faltung glättet! Hier ist g unstetig, hingegen $h=g*g$ stetig, $g*g*g$ sogar stetig differenzierbar, etc. Dies entspricht dem schnellen Abklingen der $\mathscr{F}$–Transformierten: $\widehat{g}$ geht gegen Null wie $1/\xi$, hingegen $\widehat{h}=\widehat{g}^2$ wie $1/\xi^2$, dann $\widehat{g}^3$ sogar wie $1/\xi^3$, etc.

Faltung von Rechteck zu Dreieck

Aufgabe: Zu $g=\mathbf{I}_{[-a,a]}$ bestimme man $h=g*g$ und $\widehat{h}$ sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Lösung: Hier ist $g=\mathbf{I}_{[-a,a]}$ die Rechteckfunktion mit Breite $2a$.
Die Faltung $h=g*g$ ist dann die Dreieckfunktion mit Breite $4a$:

$$\begin{aligned}
(g*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{I}_{[-a,a]}(x-t)\cdot\mathbf{I}_{[-a,a]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a}\mathbf{I}_{[x-a,x+a]}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{vol}_1\big([x-a,x+a]\cap[-a,a]\big) = \begin{cases} 2a-|x| & \text{für } |x|\le 2a, \\ 0 & \text{für } |x|\ge 2a. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die $\mathscr{F}$–Transformierte der Faltung $h=g*g$ ist das Produkt

$$\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{g}(\xi)^2 = \sqrt{2\pi}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}.$$

Dank Umkehrformel K1E von $\widehat{h}$ zu h im Punkt $x=0$ gilt

$$2a = h(0) \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Energiegleichung und Fourier–Isometrie

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \textstyle\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty \,\right\}.$$

Auf diesem definieren wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} := \textstyle\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_{L^2}^2 := \langle\, f \mid f \,\rangle = \textstyle\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Satz K3A: Plancherel 1910

Für die Fourier–Transformation $\mathscr{F}: f\mapsto\widehat{f}$ gilt allgemein $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.
Speziell für quadrat-integrierbare Funktionen erhalten wir die Isometrie

$$\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

🙂 Physikalisch bedeutet dies Energieerhaltung: Das Energieintegral $\int|f(x)|^2$ des Signals ist gleich dem Integral $\int|\widehat{f}(\xi)|^2$ der Energiedichte.

🙂 Für Fourier–Reihen gilt entsprechend die Parseval–Gleichung J110

$$\mathscr{F}: L^2([0,2\pi],\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

Energiegleichung und Fourier–Isometrie

Aufgabe: Beweisen Sie den Satz für $f \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \widehat{f}$, $g \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \widehat{g}$ mit $f,\widehat{g}\in L^1$.

Nachrechnen: Seien f und $\widehat{g}$ absolut integrierbar. Fubini ergibt dann:

$$\begin{aligned}
\langle\, f \mid g \,\rangle &\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,g(x)\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Def}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}\left[\int_{y\in\mathbb{R}} \widehat{g}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Fub}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}}\int_{x\in\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,f(x)}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}}\left[\int_{x\in\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,f(x)\,\mathrm{d}x}\right]\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y &&\overset{\text{Def}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(y)}\,\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Def}}{=} \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle
\end{aligned}$$

Speziell für $f=g$ erhalten wir die Energiegleichung $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.
Demnach ist $\widehat{f}$ genau dann quadrat-integrierbar, wenn f dies ist.
Für alle Funktionen $f,\widehat{g}\in L^1\cap L^2$ ist damit der Satz bewiesen.

Im allgemeinen Fall $f\in L^2$ wählen wir eine approximierende Funktionenfolge $f_n\in L^1\cap L^2$ mit $\|f-f_n\|_{L^2}\to 0$ und definieren $\mathscr{F}(f) := \lim \mathscr{F}(f_n)$. Dank Energiegleichung für alle f_n liegt das Ergebnis f wieder in L^2 und ist von der Wahl der Approximation $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig. So setzen wir die Fourier–Transformation fort von $\mathscr{F}: L^2\cap L^1 \to L^2\cap L^\infty$ zu $\mathscr{F}: L^2\to L^2$. Diese Fortsetzung ist eine Isometrie, das heißt, die Energiegleichung bleibt dabei erhalten.

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Wenden Sie Plancherel (K3A) an auf die Spaltfunktion

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi a)}{\xi} \quad \text{und berechnen Sie} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Lösung: Die linke Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}1\,\mathrm{d}x = 2a.$$

Die rechte Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Die Gleichung $\|f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ liefert das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = a\pi$$

🙂 Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der Hutfunktion. K413

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}}\frac{ab}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad a,b>0.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierte

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{\xi^2+a^2} = \widehat{f}_a(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned}
I &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\overline{\widehat{f}_a(\xi)}\cdot\widehat{f}_b(\xi)\,\mathrm{d}\xi &&\overset{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\overline{f_a(x)}\cdot f_b(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-(a+b)|x|}\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Sym}}{=} \pi\int_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(a+b)x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \pi\left[\frac{-1}{a+b}\,\mathrm{e}^{-(a+b)x}\right]_{x=0}^{\infty} &&= \frac{\pi}{a+b}
\end{aligned}$$

🙂 Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit dem Residuensatz. F429

Die Unschärferelation für Fourier–Paare
K305 Ergänzung

Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ quadrat-integrierbar, also $\|g\|_{L^2}^2=\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$.
Division $f=g/\|g\|_{L^2}$ durch die Norm normiert unsere Funktion zu

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=1.$$

Wir interpretieren $|f(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ (Kapitel V).
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ:

$$\mu:=\int_{\mathbb{R}}x\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x,\qquad \mathbf{V}(f):=\int_{\mathbb{R}}(x-\mu)^2\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Dank Plancherel gilt $\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=1$, also ist auch $|\widehat{f}(x)|^2$ eine WDichte.

$$\widehat{\mu}:=\int_{\mathbb{R}}\xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}x,\qquad \mathbf{V}(\widehat{f}):=\int_{\mathbb{R}}(\xi-\widehat{\mu})^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

Nach Verschiebung dürfen wir $\mu=0$ und $\hat{\mu}=0$ annehmen. K201
Die Varianz ist ein bewährtes Maß für die Breite der WVerteilung.
Diese wollen wir untersuchen und die Unschschärferelation verstehen.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare
K306 Ergänzung

Aufgabe: Führen Sie dies für die Glockenkurve $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$ aus.
Berechnen Sie die Varianzen $\mathbf{V}(f)$ und $\mathbf{V}(\widehat{f})$ sowie $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})$.

Lösung: Wir normieren g und transformieren:

$$f(x):=\frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}}\;\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad\sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}}\;\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}=:\widehat{f}(\xi).$$

Das Absolutquadrat definiert jeweils eine Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|f(x)|^2=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\;\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}},\qquad |\widehat{f}(\xi)|^2=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\;\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2},$$

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=1,\qquad \int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=1,$$

$$\int_{\mathbb{R}}x\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=0,\qquad \int_{\mathbb{R}}\xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=0,$$

$$\int_{\mathbb{R}}x^2\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{2},\qquad \int_{\mathbb{R}}\xi^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\sigma^2}.$$

Für die Varianzen gilt somit $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})=1/4$.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare
K307 Ergänzung

In unseren Beispielen sehen wir explizit die Unschärferelation:
Ist die Funktion f schmal, so ist ihre Transformierte $\widehat{f}$ breit.
Dies gilt immer und lässt sich sogar quantitativ präzisieren:

Satz K3B: Unschärferelation

Für jede quadrat-integrierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})\;\ge\;\frac{1}{4}.}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und somit $\widehat{f}$ eine Glockenkurve ist.

In der Quantenmechanik ist $|f(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort eines Teilchens, und dual hierzu ist $|\widehat{f}(\xi)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls. Die obige Ungleichung ist (bis auf Konstanten) Heisenbergs Unschärferelation. Sie besagt: Ist der Ort scharf bestimmt, so ist der Impuls unscharf, und umgekehrt. Diese Unschärferelation rührt nicht von unvollkommenen Messinstrumenten her, sondern ist prinzipieller Natur. Sie wurde 1927 von Werner Heisenberg in der von ihm (und anderen) entwickelten Quantenmechanik formuliert. Wir erkennen sie hier als eine grundsätzliche Eigenschaft der Fourier–Transformation.

Die Unschärferelation für Fourier–Paare
K308 Ergänzung

Nachrechnen: Aus $\widehat{f'}(\xi)=\mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi)$ und Plancherel–Gleichung folgt:

$$\int_{\mathbb{R}}|\xi\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f'}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Hierzu sei f absolut stetig und f' absolut integrierbar. K205
Aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung I134 erhalten wir:

$$\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})=\int_{\mathbb{R}}|xf(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\ge\left|\int_{\mathbb{R}}x\overline{f(x)}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x\right|^2\ge\frac{1}{4}$$

Für das letzte Integral nutzen wir partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\overline{f(x)}\,f'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[x\overline{f(x)}f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}f(x)+x\overline{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\quad 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}x\overline{f(x)}\,f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=-1$$

Hierzu sei $|xf(x)|^2\to 0$ für $|x|\to\infty$. Mit beiden zusätzlichen Annahmen gilt die Unschärferelation. Diese Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Per Grenzübergang gilt die Ungleichung daher für alle $f\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik
K309 Ergänzung

Die Quantenmechanik war und ist eine bahnbrechende Entdeckung.
Rasant hat sie im Laufe des 20. Jahrhunderts die Physik revolutioniert.
Ihre Anwendungen reichen vom Laser bis zur Kernspinresonanz,
vom Transistor bis zum Computer, von Atomuhr bis Atombombe.
Sie prägt bis heute unsere technikbasierte Gesellschaft.

Für technisch gebildete Menschen gehören daher die Grundideen der Quantenmechanik zur Allgemeinbildung. Zur Illustration füge ich deshalb ein paar Bemerkungen zur physikalischen Sichtweise an.
Wer in der Chemie oder der Physik der Quantenmechanik begegnet, darf sich freuen, dies hier als grob vereinfachte Skizze wiederzufinden.

Im Rahmen Ihrer Ausbildung möchte ich erneut betonen: Erfolgreiche Entwicklung / Anwendung ist engstens verwoben mit der erfolgreichen Entwicklung / Anwendung passender mathematischer Werkzeuge.
Das hat sich in allen Bereichen als Erfahrungstatsache erhärtet, und genau deshalb lernen und nutzen Sie Höhere Mathematik.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik
K310 Ergänzung

Wir betrachten den Vektorraum $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ aller quadrat-integrierbaren Funktionen $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, also $\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, mit Skalarprodukt

$$\langle\,\varphi\mid\psi\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}\overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wie zuvor normieren wir ψ durch die Bedingung $\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=1$ und interpretieren die Funktion $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte.
Der **Ortsoperator** ist die Multiplikation mit x. Bezüglich ψ gilt dann

$$\langle\,x\,\rangle:=\langle\,\psi\mid x\psi\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}x\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist der Erwartungswert der WVerteilung $|\psi|^2$, ihr Schwerpunkt.
Der **Impulsoperator** ist $p=-\mathrm{i}\hbar\partial_x$. Dank Fourier–Isometrie K3A gilt

$$\langle\,p\,\rangle:=\langle\,\psi\mid p\psi\,\rangle\overset{\mathscr{F}}{=}\langle\,\widehat{\psi}\mid\hbar\xi\widehat{\psi}\,\rangle=\int_{\mathbb{R}}\hbar\xi\,|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

Dies ist der Erwartungswert des Impulses bzgl. der WVerteilung $|\widehat{\psi}|^2$.
Im Experiment sind die gemessenen **Observablen** x und p zufällig!

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik
K311 Ergänzung

Ort x und Impuls p wirken als **Operatoren** auf Funktionen $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
Beide Operatoren sind **hermitesch** bezüglich des Skalarprodukts: I141

$$\langle\,\varphi\mid x\psi\,\rangle=\langle\,x\varphi\mid\psi\,\rangle,\qquad\langle\,\varphi\mid p\psi\,\rangle=\langle\,p\varphi\mid\psi\,\rangle.$$

Sie haben reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenfunktionen. I142
Ortsoperator x und Impulsoperator p kommutieren jedoch nicht, denn

$$x\,p\,\psi=-\mathrm{i}\hbar\,x\,\partial_x\,\psi\quad\text{aber}\quad p\,x\,\psi=-\mathrm{i}\hbar\,\partial_x(x\psi)=-\mathrm{i}\hbar\,\psi-\mathrm{i}\hbar\,x\,\partial_x\psi.$$

Wir schreiben dies kurz als **Kommutator** $[x,p]:=xp-px=\mathrm{i}\hbar$.

Wir müssen voraussetzen, dass sowohl ψ als auch $x\psi$ und $\partial_x\psi$ in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ liegen. Um dies zu iterieren nutzen wir den Schwartz–Raum $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})\subseteq L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\cap C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$: Er besteht aus allen beliebig diff'baren Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $\sup|x^m\partial^n f|<\infty$ für alle $m,n\in\mathbb{N}$. Zum Beispiel erfüllen Glockenkurven $f(x)=\exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ diese Bedingung, ebenso jede glatte Funktion mit kompaktem Träger. Die Schwartz–Funktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Damit sind $x,p:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ Operatoren auf $\mathscr{S}$. Gleiches gilt für die Transformation $\mathscr{F}:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$. Für Schwarz–Funktionen sind alle Bedingungen erfüllt und alle Rechenregeln besonders einfach. Zum Beispiel sind Wellenfunktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ Eigenfunktionen von p, denn $p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}=\hbar\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$. Diese liegen leider nicht in L^2, wir denken daher an $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\exp(-x^2/2\sigma^2)$ für sehr großes σ. Solche Dämpfung wird stillschweigend verwendet, damit die nötigen Integrale konvergieren.

Die Unschärferelation in der Quantenmechanik
K312 Ergänzung

Seien A und B zwei hermitesche Operatoren, etwa $A=x$ und $B=p$.

$$\langle\,A^2\,\rangle:=\langle\,\psi\mid A^2\psi\,\rangle=\langle\,A\psi\mid A\psi\,\rangle,\quad\langle\,B^2\,\rangle:=\langle\,\psi\mid B^2\psi\,\rangle=\langle\,B\psi\mid B\psi\,\rangle.$$

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung liefert dann

$$\langle\,A\psi\mid A\psi\,\rangle\langle\,B\psi\mid B\psi\,\rangle\ge\big|\langle\,A\psi\mid B\psi\,\rangle\big|^2=\big|\langle\,\psi\mid A\,B\,\psi\,\rangle\big|^2=\big|\langle\,AB\,\rangle\big|^2.$$

Wir zerlegen $AB=\frac{1}{2}\{A,B\}+\frac{1}{2}[A,B]$ in die Summanden

$$\{A,B\}=AB+BA\quad\text{und}\quad[A,B]=AB-BA.$$

Der Antikommutator $\{A,B\}$ ist hermitesch, also $\langle\,\{A,B\}\,\rangle$ reell,
der Kommutator $[A,B]$ ist antihermitesch, also $\langle\,[A,B]\,\rangle$ imaginär.

$$\big|\langle\,AB\,\rangle\big|\;=\;\left|\frac{1}{2}\langle\,\{A,B\}\,\rangle+\frac{1}{2}\langle\,[A,B]\,\rangle\right|\;\ge\;\frac{1}{2}\big|\langle\,[A,B]\,\rangle\big|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\boxed{\langle\,A^2\,\rangle\langle\,B^2\,\rangle\;\ge\;\frac{1}{4}\big|\langle\,[A,B]\,\rangle\big|^2}$$

Speziell für x und p wissen wir $[x,p]=\mathrm{i}\hbar$, also $\langle\,x^2\,\rangle\langle\,p^2\,\rangle\ge\hbar^2/4>0$.
Das Produkt der beiden Streuungen ist demnach mindestens $\hbar/2$.

Fourier–Transformation

K401 Fazit

Die **Fourier–Transformierte** von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \xi\in\mathbb{R}.$$

Wir fordern hierzu, dass f auf jedem Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist.
Unter dem Integral über $\mathbb{R}$ verstehen wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Zuordnung $\mathscr{F}: f\mapsto \widehat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.
Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}: \widehat{f}\mapsto f$ ist

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

Dies kürzen wir ab als **Fourier–Transformationspaar** $f \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}$.
Die Fourier–Transformation ist linear, kurz $a\,f + b\,g \circ\!\!-\!\!\bullet a\,\widehat{f} + b\,\widehat{g}$.

Eigenschaften der Transformierten

K402 Fazit

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x^2/2} &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
\mathrm{e}^{-a|x|} &\circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2/\pi}\; a/(a^2+\xi^2)\\
\mathbf{I}_{[-r,r]}(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2/\pi}\;\sin(\xi r)/\xi
\end{aligned}$$

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$, dann gilt:
Die Fourier–Transformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist stetig und beschränkt:

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$|\widehat{f}(\xi)|\to 0 \quad \text{für} \quad |\xi|\to\infty$$

Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

Grundlegende Rechenregeln

K403 Fazit

Für die Transformation $f(x)\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$\begin{aligned}
a f(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet a\widehat{f}(\xi), & f(x)+g(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi),\\
f(-x) &\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(-\xi), & \overline{f(x)} &\circ\!\!-\!\!\bullet \overline{\widehat{f}(-\xi)},\\
f(ax) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big), & \frac{1}{|a|}f\Big(\frac{x}{a}\Big) &\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(a\xi),\\
f(x-a) &\circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi), & \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x) &\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi-a),\\
\partial_x f(x) &\overset{\triangle}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi), & x\,f(x) &\overset{\triangle}{\underset{\text{K2A}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi),\\
(f*g)(x) &\overset{\triangle}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), & f(x)\cdot g(x) &\overset{\triangle}{\underset{\text{K2B}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi).
\end{aligned}$$

⚠ Die letzten vier erfordern L^1–Voraussetzungen, siehe K2A und K2B.
☺ Glattheit der Funktion f entspricht schnellem Abklingen von $\widehat{f}$.
☺ Schnelles Abklingen der Funktion f entspricht Glattheit von $\widehat{f}$.

Umkehrsätze und Isometrie

K404 Fazit

Sind $f,\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar und stetig, so gilt punktweise

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = f(x)\circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die linke Gleichung gilt, ebenso punktweise, wenn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar ist und stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert.

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty \right\}.$$

Die Fourier–Transformation definiert eine Isometrie $\mathscr{F}: L^2\to L^2$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \;\text{ und }\; \langle f\,|\,g\rangle = \langle \widehat{f}\,|\,\widehat{g}\rangle \;\text{ für } f,g\in L^2.$$

Unschärfe ist anschaulich: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit, und umgekehrt.
Quantitativ: Für alle $f\in L^2$ gilt die Unschärferelation $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})\ge\frac{1}{4}$.
Optimalfall: Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Glockenkurve ist.

Verständnisfragen

K405 Erläuterung

Aufgabe: Die Transformationen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$ sind zueinander invers; kleine Unebenheiten sind leider unvermeidbar, die sollten Sie kennen:

(1) Integrale: Nennen Sie absolut integrierbare Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit Fourier–Transformierter $\widehat{f}$, deren Rücktransformation nicht in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ gegen den ursprünglichen Funktionswert $f(x)$ konvergiert.
Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$?

(2) Reihen: Nennen Sie 2π–periodische und absolut integrierbare Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, deren Fourier–Reihe $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ nicht in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergiert.
Unter welchen Voraussetzungen gilt's in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$?

Lösung: Rechteckfunktionen $\mathbf{I}_{[a,b]}$ sind unvermeidliche Kandidaten:
Hin- und Rücktransformation liefert die sprungnormierte Funktion.

Allgemein können wir jede Funktion f in einem Punkt $x\in\mathbb{R}$ beliebig abändern, Integral und Fourier–Transformierte ändern sich dadurch nicht, aber die Konvergenz in diesem Punkt gegen $f(x)$ geht verloren.
(Das gilt allgemeiner für alle $x\in N$ in einer Nullmenge, $\mathrm{vol}_1(N)=0$.)

Verständnisfragen

K406 Erläuterung

Aufgabe: Wie verhalten sich die Transformationen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^{-1}$...

1. bei Linearkombinationen von Funktionen?
2. bei Streckung und Verschiebung?
3. bei Ableitung von Funktionen?
4. bei Produkten von Funktionen?

Welche Voraussetzungen werden jeweils benötigt?

5. Ist für jede reelle Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auch $\widehat{f}$ reell?
   Welche zusätzliche Symmetrie garantiert dies?
6. Ist für jede Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Transformierte $\widehat{f}$ stetig?
   Welche zusätzliche Voraussetzung garantiert dies?
7. Was besagt das Riemann–Lebesgue–Lemma?
8. Was besagt der Satz von Plancherel? im Vergleich zu Parseval?
9. Was besagt die Unschärferelation? Qualitativ? Quantitativ?

Lösung: Lesen Sie das obige Fazit... und noch einmal das Kapitel!
Dort finden Sie die allgemeinen Regeln und zahlreiche Beispiele.

Verständnisfragen

K407 Erläuterung

Aufgabe: (1) Was genau besagt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung? Wann genau gilt Gleichheit? Können Sie Ihre Antworten beweisen?

(2) Die Unschärferelation K3B beruht im Wesentlichen auf der Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Wann genau gilt hier Gleichheit?

Lösung: (1) Wir erinnern an Satz I1H: In jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle - \,|\, - \rangle$ gilt $|\langle u\,|\,v\rangle|^2 \le \langle u\,|\,u\rangle\,\langle v\,|\,v\rangle$ für alle $u,v\in V$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn u,v über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind.

(2) Die Unschärferelation $\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f})\ge\frac{1}{4}$ beruht auf der CSU (K3B):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(f)\cdot\mathbf{V}(\widehat{f}) &= \int_{\mathbb{R}}|x f(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|\xi\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}}|x f(x)|^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \ge \left|\int_{\mathbb{R}}\overline{x f(x)}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 = \dots \ge \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Bei Gleichheit müssen $x\overline{f(x)}$ und $f'(x)$ linear abhängig sein, also $f'(x)=\lambda\,x f(x)$ für ein $\lambda\in\mathbb{C}$ gelten. Wir integrieren $f'(x)/f(x)=\lambda\,x$ zu $\ln f(x)=c+\lambda x^2/2$ und erhalten $f(x)=C\,\mathrm{e}^{\lambda x^2/2}$. Dies ist quadrat-integrierbar für $\lambda<0$. Gleichheit gilt daher nur für Glockenkurven! K306

Verständnisfragen: komplexe Potenzen

K408 Übung

Aufgabe: Die folgende Rechnung beweist $0=1$. Wo stecken Fehler?

Für alle $k\in\mathbb{Z}$ gilt:		$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k}$	$=1$	(1)
Multiplikation von (1) mit e	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k+1}$	$=\mathrm{e}$	(2)
Einsetzen von (2) in (1)	$\Longrightarrow$	$(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k+1})^{2\pi\mathrm{i}k}$	$=1$	(3)
Potenzgesetz $(\mathrm{e}^w)^z=\mathrm{e}^{wz}$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2k^2+2\pi\mathrm{i}k}$	$=1$	(4)
Potenzgesetz $\mathrm{e}^{w+z}=\mathrm{e}^w\cdot\mathrm{e}^z$	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2k^2}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k}$	$=1$	(5)
Anwendung von (1)	$\Longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-4\pi^2k^2}$	$=1$	(6)
Grenzwert für $k\to\infty$	$\Longrightarrow$	0	$=1$	(7)

⚠ Das ist eine lehrreiche Übung, bitte versuchen Sie zuerst selbst, den Fehler einzugrenzen!
Die Gleichungen (1) und (2) sind tatsächlich gültig, auch (3) $1^z=1$ scheint noch in Ordnung, obschon die Bedeutung von a^z für $a,z\in\mathbb{C}$ unklar ist. Die letzte Gleichung (7) ist offensichtlich falsch, ebenso (6), (5), (4). Die Implikationen (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) sind alle einwandfrei, sie starten leider bei einer falschen Aussage (4). Der einzige Fehler liegt also bei (3) $\Rightarrow$ (4).
In $\mathbb{C}$ sind Logarithmen und Potenzen nicht eindeutig, daher ist extreme Vorsicht geboten! F506

Anwendung der grundlegenden Rechenregeln

K409 Übung

Aufgabe: Stimmen die folgenden Rechnungen? Wo stecken Fehler?

$$(1)\quad \left.\begin{matrix} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x<0 \end{matrix}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow\quad -af(x) = f'(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\xi\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}\xi}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$\Longrightarrow\quad f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \textit{Whaaa?}\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}\xi/a}{a+\mathrm{i}\xi}$$

$$(2)\quad \mathrm{e}^{-a|x|} = g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\xi^2}$$

$$\Longrightarrow\quad a^2\,\mathrm{e}^{-a|x|} = g''(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\xi)^2\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-a\xi^2}{a^2+\xi^2}$$

$$\Longrightarrow\quad g(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \textit{Whaaa?}\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-\xi^2/a}{a^2+\xi^2}$$

⚠ Unsere Ableitungsregel K2A verlangt absolute Stetigkeit, diese ist links jedoch nicht erfüllt. Umgekehrt verlangt die Multiplikationsregel absolute Integrierbarkeit, diese ist rechts verletzt. Tatsächlich führen die obigen, allzu naiven Rechnungen zu dramatisch falschen Ergebnissen!

Anwendung der grundlegenden Rechenregeln

K410 Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Funktionen

$$\mathrm{e}^{-|x|},\qquad x\,\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Bemerkung: Sie können die Fourier–Integrale direkt ausrechnen. . .
☹ Das ist allerdings mühsam. Versuchen Sie es einmal als Übung!
☺ Es ist viel leichter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:

Lösung: Die erste kennen wir bereits, die anderen folgern wir:
Zur Anwendung von Satz K2A sind hier alle Voraussetzungen erfüllt.

$$\mathrm{e}^{-|x|} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$$

$$x\,\mathrm{e}^{-|x|} = x f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2\mathrm{i}\xi}{(1+\xi^2)^2}$$

$$-\operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-|x|} = \partial_x f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{i}\xi}{1+\xi^2}$$

☺ Allgemein für $g(x) = p(x)\,f(x)$ finden wir ebenso $\widehat{g}(\xi) = p(\mathrm{i}\partial_\xi)\,\widehat{f}(\xi)$, wobei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ein beliebiges Polynom ist.

Anwendung zu Multiplikation und Ableitung

K411 Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ und $h(x) = x^2$ für $|x| \le a$, fortgesetzt durch Null für $|x| > a$.

Bemerkung: Wir können die Fourier–Integrale mühsam ausrechnen. . .
☺ Es ist viel effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen:
Wie / Können Sie hier die Multiplikations/Ableitungsregel anwenden?

Lösung: Wir können Satz K2A(2) auf $f = \mathbf{I}_{[-a,a]}$ anwenden:

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\xi)}{\xi} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} c_k\xi^k,$$

$$g(x) = x\,f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\xi\cos(a\xi)-\sin(a\xi)}{\xi^2}$$

$$h(x) = x^2 f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\partial_\xi^2\,\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(a^2\xi^2-2)\sin(a\xi)+2a\xi\cos(a\xi)}{\xi^3}$$

☺ Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist das Produkt $x^m f(x)$ über $\mathbb{R}$ absolut integrierbar. Die rechte Seite $\widehat{f}$ ist beliebig oft differenzierbar, gar analytisch, genauer: darstellbar als eine auf $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe. Versuchen Sie es! Sie finden $c_{2n} = (-1)^n\sqrt{2/\pi}\,a^{2n+1}/(2n+1)!$ und $c_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung des Satzes von Plancherel

K412 Übung

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel (K3A) den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierten

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\xi)}{\xi} = \widehat{f}(\xi),$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2} = \widehat{g}(\xi).$$

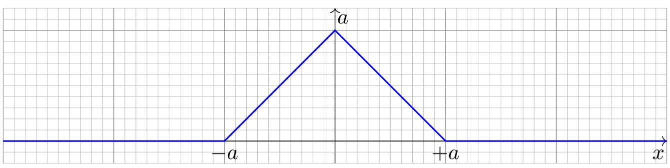
Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned} I &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\widehat{f}(\xi)}\cdot\widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi &&\overset{\text{K3A}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x-1)}\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,2]}(x)\cdot\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x &&\overset{\text{Def}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{x=0}^{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \frac{\pi}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{2} &&= \frac{\pi}{2}\Big[1-\mathrm{e}^{-2}\Big] = 1.35821\dots \end{aligned}$$

Fourier–Transformation der Hutfunktion

K413 Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die folgende Hutfunktion H_a:



(1) Nutzen Sie die Ableitung H_a' und deren $\mathscr{F}$–Transformierte.
(2) Alternativ hilft die Faltung $H_a = g * g$ mit $g = \mathbf{I}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}$. K211
(3) Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.
Plausibilitätscheck: Gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$?
Durch Rücktransformation bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\xi a)^2/\xi^2\,\mathrm{d}\xi$. K211

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

Fourier–Transformation der Hutfunktion

K414 Übung

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{-a, 0, a\}$ ist H_a differenzierbar:

$$H_a'(x) = \mathbf{I}_{[-a,0]}(x) - \mathbf{I}_{[0,a]}(x)$$

$$\widehat{H_a'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi}) - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}-1)\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[2-2\cos(a\xi)\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\mathrm{i}}{\xi}\sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x H_a(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\xi\,\widehat{H_a}(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{H_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\xi^2}\sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(a\xi)}{\xi^2}$$

☺ Dasselbe Ergebnis erhalten wir durch Faltung K211 oder direkt.
Plausibilität: Es gilt $H_{2a}(x) = H_a(x+a) + 2H_a(x) + H_a(x-a)$ und

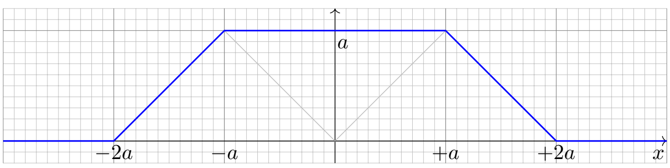
$$\widehat{H_{2a}}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi)\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\big) \quad \text{nach Verschiebungsregel}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\xi^2}\sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2\big(2+2\cos(a\xi)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\xi^2}\sin(a\xi)^2$$

Fourier–Transformation der Trapezfunktion

K415 Übung

Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Trapezfunktion T_a:



(1) Nutzen Sie die Ableitung T_a' und deren $\mathscr{F}$–Transformierte.
(2) Alternativ hilft die Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$.
(3) Alternativ setzen Sie die Definition ein und rechnen es geduldig aus.

Der direkte Ansatz (3) liegt am nächsten, führt aber zu einer etwas mühsamen Integration. Als Training sollten Sie dies einmal durchrechnen: Das ist eine sehr lehrreiche Übung. Wenn einem nichts besseres einfällt, dann ist dies auch die einzig gangbare Methode. Meist ist es günstiger wie in (1) oder (2), neue Funktionen auf alte zurückzuführen. Das geht oft schneller. Genau hierfür haben wir die Rechenregeln entwickelt!

☺ Es ist effizienter, scharf hinzusehen und geschickt zu rechnen!
Je mehr Werkzeuge Sie beherrschen und nutzen können, desto besser.

Fourier–Transformation der Trapezfunktion

K416 Übung

Lösung: (1) Außer in den Punkten $\{\pm 2a, \pm a\}$ ist T_a differenzierbar:

$$T_a'(x) = \mathbf{I}_{[-2a,-a]}(x) - \mathbf{I}_{[a,2a]}(x)$$

$$\widehat{T_a'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a\xi}) - (\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}a\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi})\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{i}}{\xi}\Big[2\cos(a\xi)-2\cos(2a\xi)\Big]$$

Dank Ableitungsregel $\partial_x T_a(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\xi\,\widehat{T_a}(\xi)$ erhalten wir:

$$\widehat{T_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi^2}\Big[\cos(a\xi)-\cos(2a\xi)\Big]$$

(2) Aus der Summe $T_a(x) = H_a(x+a) + H_a(x) + H_a(x-a)$ folgt

$$\widehat{T_a}(\xi) = \widehat{H_a}(\xi)\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi}+1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\xi^2}\sin\left(\frac{a\xi}{2}\right)^2\big(1+2\cos(a\xi)\big)$$

☺ Beide Lösungen aus (1) und (2) sehen zunächst verschieden aus.
Beide Funktionen sind aber tatsächlich gleich dank Additionstheorem.

Faltung von Normalverteilungen

Die Normalverteilung $\varphi = \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aufgabe: Für die Faltung von Normalverteilungen gilt:

$$\boxed{\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Zeigen Sie dies (1) durch Fourier–Transformation und (2) direkt.

Lösung: (1) Wir kennen die Fourier–Transformierten K128 K201:

$$\begin{aligned}
f &= \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) &&\overset{\Rightarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_1\xi - \sigma_1^2\xi^2/2} \\
g &= \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2) &&\overset{\Rightarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_2\xi - \sigma_2^2\xi^2/2} \\
h &= \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) &&\overset{\Leftarrow}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu_1+\mu_2)\xi - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2/2}
\end{aligned}$$

Wir nutzen hierzu dankend die Faltung K2B und die Umkehrung K1D.

Faltung von Normalverteilungen

(2) Wir rechnen alles direkt aus. Zur Vereinfachung sei $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

$$h(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}u$$

Zum Vergleich fügen wir den erhofften Faktor ein:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{u^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-u)^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}u$$

Dies vereinfachen wir weiter mit $\sigma^2 := \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ und $\mu := \frac{\sigma_1^2 x}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}u}_{=1}$$

🙂 Zu dieser Rechnung benötigen Sie vor allem Mut und Geduld.

▶ 3Blue1Brown betont und nutzt die Rotationssymmetrie: *A pretty reason why Gaussian + Gaussian = Gaussian.* `youtu.be/d_qvLDhkg00`.

Transformation von Differentialgleichungen

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung** S101

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \kappa\, \partial_x^2 u(t,x) && \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } t = 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x.

Hierzu gibt es Voraussetzungen: Satz K2A erfordert, dass u zweimal stetig nach x differenzierbar ist und $\partial_x^2 u$ absolut integrierbar. Das ist am Ende noch zu überprüfen, siehe hierzu Satz D5D.

Lösung: Die $\mathscr{F}$–Transformierte $\widehat{u}(t,\xi)$ erfüllt $\partial_t \widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\,\xi^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.
Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in t mit Parameter ξ.
Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t \widehat{u}(t,\xi)]/\widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\xi^2$
und integrieren von 0 bis t zu $\ln \widehat{u}(t,\xi) - \ln \widehat{u}(0,\xi) = -\kappa\xi^2 t$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t}\,\widehat{u}_0(\xi)$ für alle $t \ge 0$.
Rücktransformation $\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$\boxed{u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\, u_0(y) \,\mathrm{d}y \quad \text{für } t > 0.}$$

Transformation von Differentialgleichungen

🙂 Das Ergebnis entspricht unserer in Satz D5D präsentierten Lösung: Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ hat als Fundamentallösung eine auseinanderfließende Glockenkurve, den **Wärmeleitungskern**

$$\boxed{H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : H(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).}$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}} H(t,x) \,\mathrm{d}x = 1$. (Gauß C2G)
Für $t = 0$ sei die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorgegeben, mit $u_0 \in C_b$.
Für $t > 0$ erhalten wir die Lösung durch **Superposition** (Faltung D5E):

$$\boxed{u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(x-y)\, H(t,y) \,\mathrm{d}y = \int_{z\in\mathbb{R}} u_0(z)\, H(t,x-z) \,\mathrm{d}z.}$$

🙂 Stehen die Formeln schon da, so genügt geduldiges Nachrechnen: Machen Sie die Probe und zeigen Sie $\partial_t u = \kappa\,\partial_x^2 u$ durch Ableiten. D517

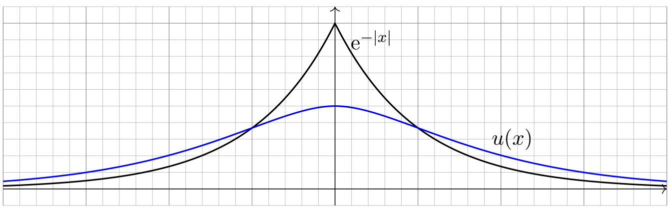
🙂 Die Fourier–Transformation bietet eine elegant-effiziente Herleitung. Anschließend sammeln und prüfen wir die Voraussetzungen (D5D, D5U).

Transformation von Differentialgleichungen

Aufgabe: Finden Sie eine quadrat-integrierbare Funktion

$$\boxed{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.}$$

Lösen Sie diese Gleichung durch Fourier–Transformation:
(1) Zu welcher Gleichung für $\widehat{u}$ wird diese DG transformiert?
(2) Lösen Sie nach $\widehat{u}$ auf und berechnen die Rücktransformierte u.
(3) Probe: Erfüllt die gefundene Funktion u die Gleichung?
(4) Ist die gefundene Funktion u die einzige Lösung?



Transformation von Differentialgleichungen

Lösung: (1) Wir fourier–transformieren die Summanden:

$$\begin{aligned}
u(x) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{u}(\xi) \\
u''(x) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{u}(\xi) \\
f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}
\end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung für $\widehat{u}$ lautet also

$$\widehat{u}(\xi) + \xi^2\,\widehat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2}$$

Diese können wir leicht nach $\widehat{u}$ auflösen:

$$\widehat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi)$$

🙂 Integraltransformationen (hier Fourier, später Laplace) machen aus Differentialgleichungen einfache algebraische Gleichungen. Wunderbar! Diese können wir leicht lösen. Dann bleibt noch die Rücktransformation.

Transformation von Differentialgleichungen

(2) Dank Faltungsformel finden wir $u = \frac{1}{2} f * f$. Für $x \ge 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{e}^{-|x-t|} \,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|-x+t} \,\mathrm{d}t + \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|+x-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|+t} \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-2t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Für die letzten beiden Integrale gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t|+t} \,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t} \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{0} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + x \\
\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-2t} \,\mathrm{d}t &= \frac{-1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-2t}\Big]_{x}^{\infty} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}$$

Für $x \ge 0$ erhalten wir somit folgendes Ergebnis:

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2} + x\right) + \mathrm{e}^{x}\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right] = \frac{1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Da die Funktion $u = \frac{1}{2} f * f$ gerade ist, folgt schließlich

$$u(x) = \frac{1}{2}\big(1 + |x|\big)\,\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Transformation von Differentialgleichungen

(3) Wir machen die Probe. Für $x \ge 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2}(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-|x|}$. Für $x \le 0$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{2}(1-x)\,\mathrm{e}^{x}, \quad u'(x) = \frac{-1}{2}x\,\mathrm{e}^{x}, \quad u''(x) = \frac{-1}{2}(1+x)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Hier gilt $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-|x|}$. Somit ist u quadrat-integrierbar, zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung.

(4) Die homogene Gleichung $u - u'' = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{x} + \beta\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Allgemeine Lösung der Gleichung $u(x) - u''(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ ist demnach

$$u(x) + u_h(x) = \frac{1}{2}\big(1 + |x|\big)\,\mathrm{e}^{-|x|} + \alpha\,\mathrm{e}^{x} + \beta\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Quadrat-integrierbar ist diese Funktion nur für $\alpha = \beta = 0$.

🙂 Die Laplace–Transformation (Kapitel L) geht hier weiter!