

Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

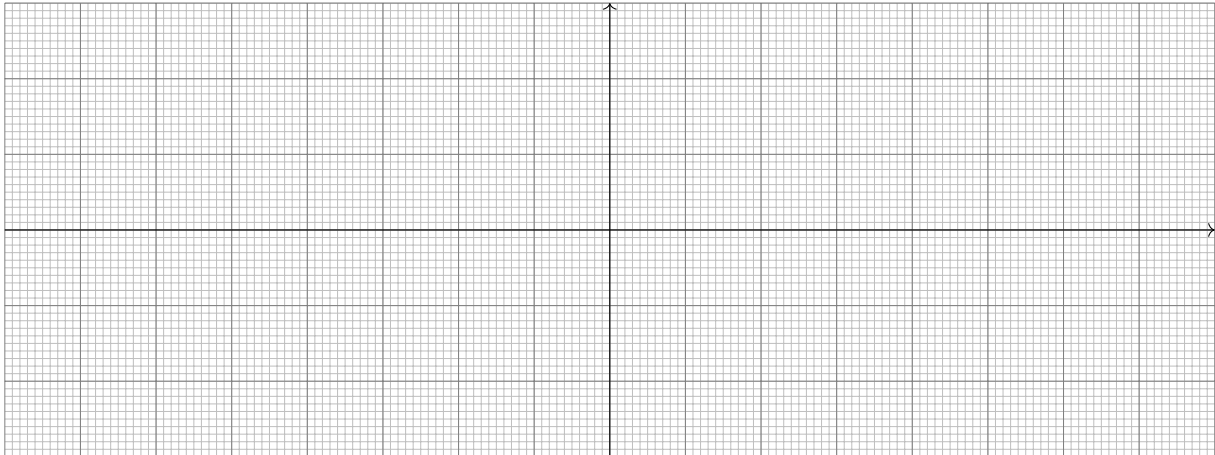
Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander.
Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/10	/16	/23	/72

Aufgabe 3. Integralsätze in der Ebene (2+4+2+2 = 10 Punkte)**3A.** Skizzieren Sie das Bild des Weges $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = |t| \cdot (\cos t, \sin t)$:

2Die umschlossene Fläche $H = \{ \rho \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq |\varphi| \}$ hat Inhalt ≈ 10 .**3B.** Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x, y) = (-y, x)$ das Arbeitsintegral $\int_{\gamma} f(s) \cdot ds$ entlang γ .
Hinweis: Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ im Punkt $t \neq 0$ erfüllt $\frac{d}{dt}|t| = \text{sign}(t) \in \{\pm 1\}$.
$$\int_{\gamma} f(s) \cdot ds =$$

4**3C.** Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subset \mathbb{R}^2$:
$$\text{vol}_2(H) = \int_H 1 \, d(x, y) \, dx =$$

2**3D.** Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes $g(x, y) = (x^2 + 4y, 10x + e^y)$ längs γ :
$$\int_{\gamma} g(s) \cdot ds =$$

2

5D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe von f an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \pm \dots \in [0.75, 0.83]$.

2

5E. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

 $A_0 =$
 $A_k =$
 $B_k =$

3

5F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe von F an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(4j+2)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{22^2} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{30^2} + \dots \in [0.30, 0.34]$.

3

6D. Parametrisieren Sie den Deckel D in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \boxed{} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \boxed{} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}.$$

3

6E. Berechnen Sie mit Ψ das Flussintegral von $f(x, y, z) = (0, 0, z)$ durch D nach außen:

$$\int_D f(s) \cdot dS =$$

3

6F. Berechnen Sie hieraus das Volumen von K mit dem Satz von Gauß:

$$\text{vol}_3(K) = \int_K \text{div}(f) d(x, y, z)$$

2

Wir betrachten das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} - e^{-2} \\ x e^z \\ -e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

6G. Berechnen Sie das Flussintegral von $\text{rot}(g)$ durch die Fläche $M \cup D$ nach außen:

$$\int_M \text{rot } g(s) \cdot dS + \int_D \text{rot } g(s) \cdot dS$$

4

6H. Berechnen Sie das Flussintegral von g durch die Bodenfläche B nach außen:

$$\int_B g(s) \cdot dS =$$

4