

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/14	/12	/14	/10	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

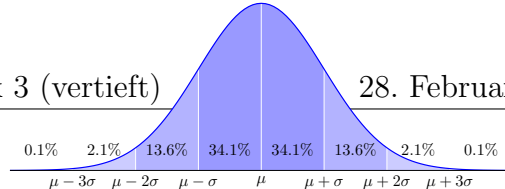
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.


Aufgabe 3. Wahrscheinlichkeitsrechnung ($4+3+4 = 11$ Punkte)

3A. Die deutschen Euromünzen werden geprägt in A = Berlin (20%), D = München (20%), F = Stuttgart (25%), G = Karlsruhe (15%) und J = Hamburg (20%). Sie wählen zufällig 1200 deutsche Euromünzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p kommen höchstens 315 aus Stuttgart? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$\mu = 1200 \cdot \frac{1}{4} = 300$	Erwartungswert
$\sigma^2 = 300 \cdot \frac{3}{4} = 225, \quad \sigma = 15$	Varianz und Streuung
$p \approx \int_{-\infty}^{\alpha} \varphi(t), \quad \alpha = 15.5/15 = 1.03333 \dots$	Lokaler Grenzwertsatz
$\approx 0.849 \approx 85\%$	Ablesen aus der Tabelle
<i>Erläuterung:</i> Bei Stichprobe ohne Zurücklegen ist die exakte Verteilung hypergeometrisch. Da jedoch die Gesamtzahl der Münzen enorm groß ist, genügt hier ebenso die naheliegende Binomialverteilung $B(n, t)$ als Modell, mit $n = 1200$ und $t = 3/4$. Als bequeme Näherung für $B(n, t)$ nutzen wir schließlich die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen aussagekräftige Fehlerschranken, das wurde hier nicht gefragt. Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\alpha = 15/\sigma = 1$ und $p \approx 0.841 \approx 84\%$; das ist etwas ungenauer. Der exakte Wert ist $p = 0.84920 \dots$, unsere Näherung ist hier also sehr gut.	

4

3B. Sie suchen einem Prägefehler, der insgesamt mit Wkt $1/1000 = 0.1\%$ auftritt. Sie wählen zufällig 2000 Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q finden Sie höchstens 2 fehlerhafte? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$\lambda = \frac{2000}{1000} = 2$	Erwartungswert der Trefferzahl
$q \approx \left[\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} \right] e^{-\lambda}$	Näherung durch Poisson-Verteilung
$\approx 5 \cdot 0.135 = 0.675 \approx 68\%$	Einsetzen und ausrechnen
<i>Erläuterung:</i> Exakt wäre hier die Binomialverteilung $B(n, t)$ mit $n = 2000$ und $t = 1/1000$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.67667 \dots$, die Poisson-Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen die apriori Fehlergrenzen, das wurde hier nicht gefragt.	
<i>Fun fact:</i> Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen. Wenn Sie es dennoch tun, finden Sie $\int_{-2.5/\sigma}^{0.5/\sigma} \varphi(t) dt \approx 0.59975 \approx 60\%$. Diese Näherung ist nicht gut genug; das war zu erwarten.	

3

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen* ($4+3+7 = 14$ Punkte)**4A.** Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$.Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = x^2 + 4x + 5 = (x + 2 + i)(x + 2 - i) \quad \text{Quadratisches Polynom}$$

Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = c_1 e^{(-2-i)t} + c_2 e^{(-2+i)t} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{Komplexe Fundamentallösungen}$$

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = a_1 e^{-2t} \cos(t) + a_2 e^{-2t} \sin(t) \text{ mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \text{Reelle Fundamentallösungen}$$

4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^t$.

$$y(t) = \frac{1}{p(1)} e^t = \frac{1}{10} e^t \quad \text{Exponentialansatz / Lösungsformel}$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{(-2+i)t}$.

$$y(t) = \frac{1}{p'(-2+i)} t e^{(-2+i)t} = \frac{1}{2i} t e^{(-2+i)t} = -\frac{i}{2} t e^{(-2+i)t} \quad \text{Resonanz, Lösungsformel}$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{-2t} \cos(t)$.

$$y(t) = \operatorname{Re} \left[-\frac{i}{2} t e^{-2t} \cos(t) + \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin(t) \right] = \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin(t) \quad \text{Realteil der vorigen Lösung}$$

4C. Zu lösen ist für $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t, x) + 2t \partial_x u(t, x) = -u(t, x) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = \cos(x) \quad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Erläuterung: Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1, & t(0) &= 0, \\ x'(s) &= 2t(s), & x(0) &= x_0, \\ z'(s) &= -z(s), & z(0) &= \cos(x_0). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$$t(s) = s, \quad x(s) = x_0 + s^2, \quad z(s) = e^{-s} \cos(x_0)$$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung: Wir lösen $u(t(s), x(s)) = z(s)$ auf und erhalten

$$u(t, x) = e^{-t} \cos(x - t^2) \quad \text{Startwerte transportiert längs Charakteristiken}$$

Machen Sie schließlich die Probe:

Wir leiten $u(t, x)$ geduldig ab und erhalten

$$\partial_t u(t, x) = -e^{-t} \cos(x - t^2) + 2t e^{-t} \sin(x - t^2) \quad \text{nach Produkt- und Kettenregel}$$

$$2t \partial_x u(t, x) = -2t e^{-t} \sin(x - t^2) \quad \text{Probe: } u(t, x) \text{ erfüllt die PDE!}$$

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (2+4+2+4 = 12 Punkte)

Zu lösen ist $y'(t) = A y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor von A : Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Dank Probe!}$$

zum Eigenwert $\lambda_1 =$

$$-2$$

$\frac{1}{2}$

5B. Die drei verbleibenden Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von A sind gleich, berechnen Sie diese:

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 =$

$$1$$

$$\text{Wir untersuchen } A - 1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von A . Geben Sie die Hauptvektorkette $v_3 \mapsto v_2 \mapsto 0$ aus Hauptvektor v_3 und Eigenvektor v_2 an:

$v_3 =$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dank Probe!}$$

$\mapsto$

$v_2 =$

$$(A - 1)v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 1)v_2 = 0$$

Bestimmen Sie $v_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_4 =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{weiterer Eigenvektor!}$$

unabhängig von v_2 , damit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4)

$\frac{1}{4}$

5C. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $y_1'(t) = A y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$.

$$y_1(t) = e^{-2t} v_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Dies ist eine reelle Eigenfunktion.}$$

Bestimmen Sie die Lösung $y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $y_3'(t) = A y_3(t)$ und $y_3(0) = v_3$.

$$y_3(t) = e^t(v_3 + t v_2) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Dies ist eine reelle Hauptfunktion.}$$

 2

5D. Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSytem $y'(t) = A y(t) - t e^{(t^2/2)-2t} u_3$ mit $y(0) = 0$ besitzt eine Lösung der Form $y_p(t) = c(t) e^{-2t} u_3$. Berechnen Sie:

$$y_p'(t) = [c'(t) - 2c(t)] e^{-2t} u_3 \quad \text{Ableitung nach Produktregel.}$$

$$A y_p(t) = -2c(t) e^{-2t} u_3 \quad \text{Eigenvektor, } A u_3 = -2u_3.$$

Einsetzen in unser inhomogenes DGSytem ergibt folgende Differentialgleichung für c :

$$c'(t) = -t e^{t^2/2} \quad \text{mit Startwert } c(0) = 0.$$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist daher:

$$c(t) = -e^{t^2/2} + 1 \quad \text{Machen Sie die Probe!}$$

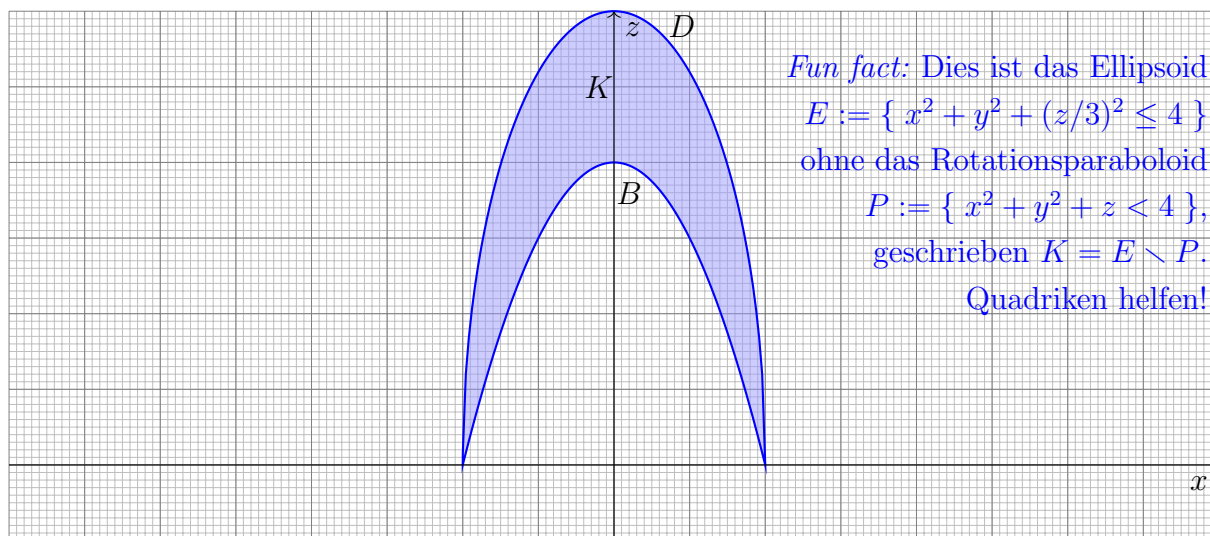
 4


Aufgabe 6. Dreidimensionale Integrale und Integralsätze ($3+3+5+3 = 14$ Punkte)

Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ e^{-x^2} e^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x - z -Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq \rho \leq \boxed{2}, \\ \boxed{4 - \rho^2} \leq z \leq \boxed{3\sqrt{4 - \rho^2}} \end{cases}$$

3

6B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\text{vol}_3(K) \approx 25$ des Körpers K :

$\text{vol}_3(K) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_{\rho=0}^2 \int_{z=4-\rho^2}^{3\sqrt{4-\rho^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, dz \, d\rho$	Transformationssatz anwenden
$= 2\pi \int_{\rho=0}^2 3\rho\sqrt{4-\rho^2} - \rho(4-\rho^2) \, d\rho$	Innere Integrale vereinfachen
$= 2\pi \left[-(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(4-\rho^2)^2 \right]_{\rho=0}^2$	Stammfunktion
$= 2\pi [8 - 4] = 8\pi \approx 25$	Einsetzen
<i>Erläuterung:</i> Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen! Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine.	

3

6C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 4 - x^2 - y^2$ und dem Deckel D mit $z = 3\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 4 - \rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_B}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\rho^2 \cos \varphi \\ 2\rho^2 \sin \varphi \\ \rho \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B :

$$\begin{aligned} \int_{s \in B} f(s) \cdot dS &= \int_{\rho=0}^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\varphi \, d\rho && \text{Einsetzen und vereinfachen} \\ &= \pi \int_{\rho=0}^2 2\rho e^{-\rho^2} \, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^2 && \text{Stammfunktion} \\ &= \pi \left[1 - e^{-4} \right] \approx \pi && \text{Einsetzen} \end{aligned}$$

Erläuterung: Das positive Vorzeichen des Integrals entspricht der Anschauung: Vektorfeld und Normalenvektor zeigt hier nach oben, also in den Körper K hinein. Das ist eine der beiden möglichen Orientierungen, für den Gaußschen Integralsatz in der nächsten Frage benötigen wir die umgekehrte Orientierung. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s \in D} f(s) \cdot dS = \int_{s \in B} f(s) \cdot dS + \int_K \operatorname{div}(f) \, dK = \pi \left[1 - e^{-4} \right] \quad \text{Dank Gauß!}$$

6D. Berechnen Sie den Fluss von $g = \operatorname{rot}(f)$ durch B nach oben als geeignetes Wegintegral:

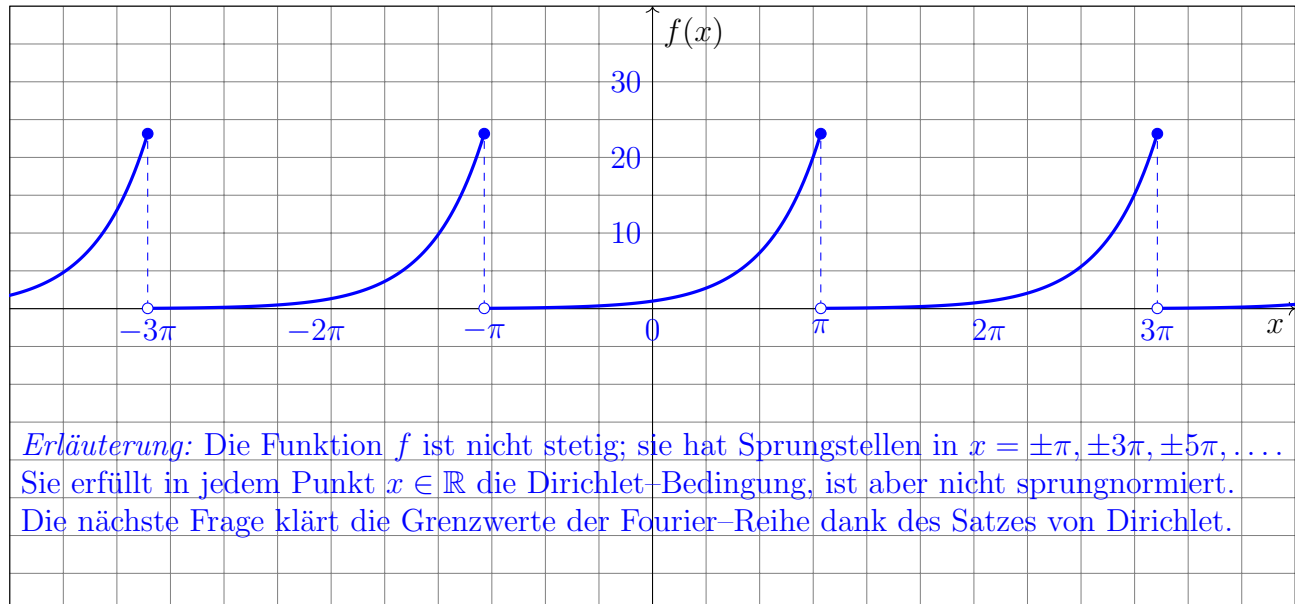
$$\begin{aligned} \int_{s \in B} g(s) \cdot dS &= \int_{s \in B} \operatorname{rot} f(s) \cdot dS = \int_{\partial B} f(s) \cdot ds && \text{Dank Stokes!} \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\Phi_B(2, \varphi)) \cdot \partial_\varphi \Phi_B(2, \varphi) \, d\varphi && \text{Parametrisieren, } \rho = 2 \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 4 \, d\varphi = 8\pi \approx 25 && \text{Einsetzen und ausrechnen} \end{aligned}$$

Erläuterung: Alternativ können Sie explizit das Vektorfeld $g = \operatorname{rot} f$ und das Flussintegral $\int_{s \in B} g(s) \cdot dS$ berechnen. Dieser Rechenweg ist zwar etwas länger, hier aber ebenso möglich. Übung: Probieren und vergleichen Sie beide! Das Ergebnis ist dasselbe, so wie es sein muss.

Aufgabe 7. *Fourier-Reihen* ($2+4+2+2 = 10$ Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit $f(x) = e^x$ für $-\pi < x \leq \pi$.

7A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\pi) =$$

$$\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$$

Dank Dirichlet-Kriterium!

2

7B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx && \text{Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x} dx && \text{Einsetzen und vereinfachen: Exponentialgesetz} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} \right]_{x=-\pi}^{\pi} && \text{Stammfunktion ausschreiben} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+ik}{1+k^2} [e^\pi - e^{-\pi}] (-1)^k && \text{Einsetzen und vereinfachen} \end{aligned}$$

Erläuterung: Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine.

Das Ergebnis wurde soweit möglich vereinfacht, sodass der Nenner reell ist. Insbesondere können Sie aus c_k leicht die reellen Koeffizienten $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$ ablesen. Diese werden diesmal sogar explizit abgefragt, zwecks Übung und weiterer Nutzung.

3

Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)} [e^\pi - e^{-\pi}], \quad b_k = \frac{i(c_k - c_{-k})}{\pi(1+k^2)} [e^\pi - e^{-\pi}]$$

1

7C. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe von f an der Stelle $x = \pi$ den exakten Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \dots \in [1.0, 1.1]$.

$\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (-1)^k$	Auswerten an der Stelle $x = \pi$
$= \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+k^2} \right] (e^\pi - e^{-\pi})$	Einsetzen der berechneten Koeffizienten
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2} = 1.076674\dots$	Auflösen nach der gesuchten Reihe
<i>Erläuterung:</i> Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet, denn im Punkt $x = \pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x \pm) = e^{\mp\pi}$ und auch die Ableitungen $f'(x \pm) = e^{\mp\pi}$. Die Fourier-Reihe $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert daher im Punkt $x = \pi$ für $n \rightarrow \infty$ gegen den Mittelwert $(f(x-) + f(x+))/2$. Die so erhaltene Gleichung lösen wir dann sorgfältig auf.	
Alternativ können Sie die reelle Fourier-Reihe nutzen, das ist vielleicht etwas einfacher. Insbesondere benötigen Sie hierzu nur die Koeffizienten a_k , die oben angegeben wurden.	

2

7D. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe $f'(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}$ der Ableitung f' von f .

$\gamma_k = c_k = \frac{1}{2\pi} \frac{1+ik}{1+k^2} [e^\pi - e^{-\pi}] (-1)^k$	wie oben berechnet, da $f' = f$ auf $] -\pi, \pi[$.
<i>Erläuterung:</i> Es gilt $f' = f$ außer in den Sprungstellen $x = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi$, also haben f und f' dieselbe Fourier-Reihe! Die überaus bequeme und daher so beliebte Ableitungsformel	
$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$	$\implies f'(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik c_k e^{ikx}$
gilt hier offensichtlich nicht. Der zugehörige Satz lässt sich nur anwenden, wenn f absolut stetig ist, also stetig und fast überall differenzierbar mit $f(x) = f(0) + \int_{t=0}^x f'(t) dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das ist hier offensichtlich nicht der Fall: Betrachten Sie aufmerksam die obige Skizze! Sie müssen also – wie immer – bei der Anwendung eines Satzes / einer Rechenregel die zugehörigen Voraussetzungen beachten. Bitte lesen Sie die Gebrauchsanweisung!	

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.